様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １８ 日現在

機関番号：３２６０５
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６４０００１９

研究課題名（和文）擬鏡映群の諸相（整数表現とブラウワーの三角形、代数群の正規環への作用）

研究課題名（英文）Various aspecst of pseudo-reflection groups and related topics

研究代表者
中島　晴久（Nakajima, Haruhisa）

桜美林大学・自然科学系・教授

研究者番号：９０１４５６５７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,500,000円

研究成果の概要（和文）：Gを任意標数pの代数閉体K上のアフィン代数群でその連結部分をG0とする。G0がトーラスである時に，GがG0の中心拡大である為の判定条件を，G0とその中心化群の間にあるHとそのクルルK-整域への正則作用の分岐理論で与えた。一般にG0を簡約可能とする。Gが部分トーラスTの中心拡大である時に，正則に作用するクルルK-整域RについてGのT-不変部分環上の擬鏡映がR上のそれに持ち上がることを示した。Gが一般の連結群でありクルルK-整域に正則に作用する時に，有理指標の加群が自由であるような適当な半不変式をカットすることで，G-不変部分環の簡略な計算法を与えた。
　コンパクト群の測度の判定に関する結果を得た。

研究成果の概要（英文）： Let G be an algebraic group with the identity component G0 over an algebraically closed field K of characteristic p. Denote by (R, G) an integral K-domain R with a regular action of G. In the case that G0 is a torus, we show a criterion for G to be a finite central extension of G0 in terms of ramification theory of all regular actions of any closed subgroup H containing the centralizer of G0 in G on Krull K-domains (R, H) satisfying the invariant quotient field condition on (R, H). Generally suppose G0 is reductive. Let T be a subtorus of G under the similar condition on quotient fields. We show: If G is the centralizer of T in G, then the pseudo-reflections of the action of G on the ring of invariants of T in R can be lifted to those on R.
　Let G assumed to be connected and consider (R, G) with a Krull R. We give the minimal calculation of the ring S of invariants of G in R and their class groups by cutting the prime semi-invariants which form free modules over S.

研究分野：代数学

キーワード：擬鏡映　代数群　コンパクト群　クルル環　因子類群　非アフィン環　半不変式　セリュラーオートマトン

１．研究開始当初の背景

（１）p-コンパクト群の不変式について：
位相幾何学者はSteenrodの問題の関係で，p-コンパクトな群が整数環上の対称多元環に作用する時の不変部分環を決定しており，ICM の招待講演の栄誉を受けたように，高い評価を受けている（引用文献③)。その研究ではJ.-P. Serre-中島の定理として知られる有限擬鏡映群の固定部分群が再び擬鏡映群であるということを用いて，ルート系によるp-コンパクト群の分類に基づくケースバイケースの個別撃破で結果を得ている。これはShephard-Todd によって複素擬鏡映群が分類されて，個別な計算で不変式環が多項式環であることを示したことに似ている。従ってルート系による群の分類によらずに，整数環とその素数による簡約，複素数体への持ち上げを駆使するという有限群の表現のブラウワー三角形の方法を，不変式論で展開することを計画するのは自然であり，意味深い別証明を与えることになるだろう。

（２）ロシア予想について：
幾何学的不変式論の概説書として高名なMumford の本（引用文献①）において，ロシア予想＝「連結半単純群の同次元ファイバーを持つような表現は，余自由であろう」という予想が述べられている。半単純群はおろか，一般の連結なアフィン代数群でも，このことは成り立つのではないか？　ということをV.L. Popov やV.G. Kac は言っている。予想が立てられてから，半世紀にわたり未解決である。連結代数群Gはそのユニポテント根基R_u(G)で割れば，簡約可能群になる。簡約可能群は半単純部分で割れば，代数的トーラスになる。Gの有限次元線形表現VをR_u(G)で商をとると，一般にはネーター性すなわち基礎体K上の有限生成性（アフィン性）が失われるが，Krull にはなっている。この観点から，K上アフィンとは限らないKrull K-整域上での，代数群の不変式論を展開する必要性が生じる。

２．研究の目的

（１）有限群の整数表現について，不変式環が多項式環となるものを，モジュラー表現の同様な分類との関連で明らかにしたい。その為にはSteinbergの固定点定理の整数表現版を構成することを考えている。また整係数群環の単数やそれに付随する自己同型の構造を調べたい。

（２）代数群全てを対象とするに相応しい深い課題にアタックするには，アフィンとは限らないKrull K-整域Rに代数群Gが正則に作用している(R, G)に関する不変式論を事前に構築するべきである。ロシア予想に限らず，代数群の線形表現を不変式絡みで分類する場合にも，このような道具が準備されている必要がある。更に基礎体の標数が0であるか正であるかによって，環論的な難しさが著しく異なるのだが，なるべく標数に依らない(これをcharacteristic-freeという)定理達を構築するのが望ましい。つまり Krull K-整域のcharacteristic-free不変部分環の研究を行う。
具体的には因子類群の計算と部分環そのものの決定を効率よく行う方法を見つけたい。
ロシア予想についてはコニカルな正規多様体へのトーラスの同次元コニカル作用については，標数0では構造定理の証明に引用文献⑦で成功したが，正標数の場合でも同様なことが成立すると予想される。また次数付き構造を排除した場合へ，この方法を一般化したい。

３．研究の方法

（１）整係数群環の単数群についてScottらの方法で構造の簡単な有限群について計算を行う。Steinberg 型固定点定理については代数群作用も含めて，Lunaのスライス理論の範疇で考察が出来るのではないかと考えている。

（２）Dedekind環の分岐理論は，有限群がガロア群として作用している場合に作られた古典的な結果である。これを連結とは限らない代数群の Krull K-整域Rへの正則作用(R, G)について一般化する。引用文献⑤で古典的分岐理論はGの連結部分G^0がトーラスである場合に一般化出来たが，正標数の場合の取り扱いが不十分であり，我々が基準とするcharacteristic-free アプローチには達していない。ここを完全なものとする為に非分離拡大の分岐（野性的分岐）について調べるのでアルチン・シュライヤーの方法や射影曲線の正標数下でのガロア被覆が参考になる。

（３）Magid のディセントメソッド（引用文献②）はホップ代数の描像下では，K 上アフィンではないKrull K-整域にまで一般化されているが，半不変式が見えていないので，それが見える方法で一般化すると,「研究の目的」の（２）のアプローチと共に，不変部分環の因子の計算が可能になるだろう。

（４）環Aがそのイデアル I と部分環Bの直和として表される場合をAはB上レトラクションを持つという。閉正規部分群Hによる商群G/Hがトーラスとなるような A= R^H, B=R^Gへの応用を視座において，Z^m-次数付環Aの特殊なレトラクションを調べる。

（５）方法（４）を適用して，Krull K-整域R^Gを簡約化したR^Hとそのレトラクションを調べるという方法を確立する。その結果と

して，R^G の因子類を R^H の因子類，引いてはＲの因子類とＧの適当な有理指標により結びつけることを行いたい。

（６）方法（５）が出来たら，これを用いて一般の代数群の表現でロシア予想に関わる部分を分類して行く。例えば単純代数群を半単純成分とする簡約可能代数群の同次元ファイバーを持つような表現が余正則であるということを，簡明に示せる可能性がある（引用文献④)。

（７）セリュラーオートマトンの移入性について，それを組合せ論的な立場から特徴付けることを行い，位相空間において例を構成する。

（８）コンパクトな連結群の Bochner 型定理に関連する問題について Saeki らの研究にインスパイアされることで研究する。またその上の半指標と測度の関わりを調べる。

４．研究成果

（１）整係数群環の環論的研究：整係数群環 ZG の単数群は，ZG の自己同型群の構造を調べる為に，重要な研究対象になる。古典的な簡約問題「ZG と ZH の環同型はＧとＨの群同型をもたらすか」がその背景にある。ここでは二面体群 Dn についてその「ねじれ単数」を研究して特徴付けを与えた（関口)。

（２）静止型ｑを持つ有限セリュラーオートマトンの移入性について，そのオートマトンの Moore の或る配置(configuration)により特徴付けることを行い，また大域的 な表現での詳しい特徴付けも得た（石橋)。

一方に於いて，離散位相空間の直積か離散空間となる為には,それか有限個の離散空間と位相同相であることを示した（石橋)。

この応用として，整数環に対するセリュラーオートマトンの配置集合を取り扱い，それがコンパクトな距離空間になることを示した（石橋)。

（３）局所コンパクトアーベル群の Bochner 型定理に関連する諸問題を Asmar， Saeki Montgomery-Smith の結果 と，Glicksberg 及び Leeuw の定理に関連する研究を行った。

特に連結な群に対して，有界測度と Haar 測度が相補的に絶対連続である判定定理を証明した（山口)。

指標は全ての可換部分ては指標となる写像てあるか，コンパクト群上の半指標と解析的測度との関係を研究した（山口)。

可換環Ａの全商環を Q(A)で表す。

以下では次の記号については固定的に扱うことにする： 任意標数 p の代数閉体Ｋ上で線形代数群とスキームを考える。X=Spec R を整K-スキームとし，代数群ＧのＸ上への正則作用を(X, G)で表す。ここでＲはＫ上の多元環として有限生成という仮定は置かない。

（４）Ｇ か連結の時には G-有理ツイスト RG 加群ＭのＲの商体への持ち上げのＲ-正則な要素ｆについて，Rf が G-不変であれは Kf も G-不変になることを示した.特に R が Krull の時には f の負の離散付値を与える素因子の R^G への制限がゼロでないという場合に，f はＧの半不変式になる，すなわち Kf はＧの有理指標を定めることになる。これによって Magid の因子類群の降下定理(文献②)が Krull にまで一般化されると共に，因子類群の差分を細分して評価し,R の因子との差分はＧのＳから持ち上かる要素に対応する有理指標群を，単数由来の有理指標群で割って出来る商群であることを示した（プレプリントを arXiv に掲載準備中)。

（５）(R, G)の擬鏡映とはＲのＧ不変環 R^G への制限が高さ１となるような極小素イデアルのＧ作用下での慣性群の元を言い，それらで生成されたＧの部分群を群作用(R, G)の擬鏡映群という。引用文献⑧でＧが簡約可能であることと，任意の Kull K-整域Ｒへの Ｇの作用(R, G)の擬鏡映群が有限であることは同値と示された。ここでは引用文献⑤で得られたトーラス群の作用の下での上記のような極小素イデアルの分岐指数と慣性群の位数との関係を，精密化した。その結果として，代数的トーラスの中心拡大である為の必要十分条件を，各極小素因子の分岐指数と慣性群及び群の有理指標群の間の関係式が成立することとして与えた。複雑な結果なので詳細は省く。

（６）結果（５）の応用として群作用の擬鏡群の持ち上げを研究した。R か Krull でありＴをＧの閉連結部分トーラスでＧかＴの中心拡大となっていて,T不変部分環R^Tの商体とRの商体のT不変部分体に等しい時には,(R^T, G)の擬鏡映か(R, G)の擬鏡映に持ち上がるという定理を証明した(引用文献⑨)。この結果はベストポッシブルであるという分析も行っている。

（７） R が Z^m-次数付環の構造を持ち，素元からなる斉次元の組 f=(f_1,..., f_m)に関する半自由であるとは,deg(f_i)は第 i 成分が１で残りは 0, R_i, i=(i_1,..,i_m), (i_j は非負)が f の単項式によって R_0-加群として自由加群である時に言う。

一方，K-Krull 整域Ａとその K-部分代数Ｂでそれが Q(B)とＡの共通部分であるとする。(B, {g_1,…, g_m})がＡの paralleled linear hull であるとは,

① A/(g_1-1,…, g_m-1)がＢと K-同型,

② {g_1,…, g_m}は Q(B)上代数的に独立

③ ＡとＢの因子類群が自然に同型,

を満たす時に言う。

この２つの概念を導入して,次を証明した。Rが Krull K-整域で Z^m-次数環，斉次素元の組 f=（$f_1,..,f_m$)に関する半自由であるならば,(R,{$f_1,.., f_m$})は R_0 の paralleled linear hull である。

（８） 結果（４）,（７）を不変式環に応用する。代数群 Gは連結,Rは Krull とする。R^G の極小素因子 p で p の上にある R の極小素因子の集合を $Over_p(R)$ とする。$Over_p(R)$の元の個数が２個以上となる様な p の集合をΛで表す。R^G で blow-up するような R の極小素因子の集合をΓとする。p がΛを動いてとった $Over_p(R)$の和集合とΓとは有限集合であり，これらは単項イデアルからなると仮定する（例えば R が factorial)。その時，R の単項素イデアルの集合{$Rf_1,..,Rf_m$}で,

①Λの各元 p について $Over_p(R)$との共通部分の濃度は$|Over_p(R)|-1$,

②Λの p の $Over_p(R)$に属さないものは R^G で blow-up する R の極小素イデアルの集合にイコール,

を満たすものがとれる。有限性と以下の証明において，引用文献⑥で得られた，相対不変式加群の自由性に関する R. Stanley の定理の無限群への一般化が，効果的な役割を演じている。

次を証明した。(R,{f_1, .., f_m})は R^G の paralleled linea hull になっている。R^G の因子類群 $Cl(R^G)$と R のそれとの差分をの G の一部の有理指標から導かれる群によって計算出来ることも示した。基礎体の K の標数が０の場合には，群作用(R, G)の擬鏡映群による商群の有理指標で，差分を表すという簡易な表現を得る。

このパートは，例えば引用文献④で試みられたような，半単純ではない簡約可能代数群,或はもっと一般的に簡約可能でさえない連結代数群の不変式論へ展開されると予想されよう。

<引用文献>

① David. Mumford, John Fogarty, Frances Kirwan, Geometric Invariant Theory, 3rd. Enlarged Ed., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982

② Andy Magid, Finite generation of class groups of rings of invariants, Proc. of Amer. Math. Soc. Vol. 60, 1976, 45-48

③ K. K. S. Andersen, J. Grodal, J. M. Møller, and A. Viruel. The classification of p-compact groups for p odd. Ann. of Math. (2), Vol. 167(1), 2008, 95-210

④ 中島 晴久, Equidimensional toric extensions of symplectic groups, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., Vol. 70, 1994, 74-79

⑤ 中島 晴久, Reduced ramification indices of quotient morphisms under torus actions, J. Algebra Vol. 242, 2001, 536-549

⑥ 中島 晴久, Divisorial free modules of relative invariants on Krull domains, J. Algebra Vol. 292, 2005, 540-565

⑦ 中島 晴久, Reduced class groups grafting relative invariants, Advances in Math. Vol. 227, 2011, 920-944

⑧ 中島 晴久, Reductivities and finiteness of pseudo-reflections of algebraic groups and homogeneous fiber bundles, J. Pure and Appl. Algebra, Vol. 217, 2013, 1548-1562

⑨ 中島 晴久, Liftings of pseudo-reflection groups of toric quotients of Krull schemes, arXiv:1801.00219 [math.GR], Cornell University, 2017

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計８件）

① 中島 晴久, Valuative characterization of central extensions of algebraic tori on Krull domains, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications, 査読有, Vol. 40, No. 2, 2018, pp. 113-146
DOI:10.17654/NT040020113

② 中島 晴久, Calculation of invariant rings and their divisor class groups by cutting semi-invariants, RIMS Kokyuroku, 査読有, 2018（掲載予定）

③ 石橋 宏行, Injectivity of cellular automata, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications, 査読有, Vol. 40, No. 2, 2018, pp. 199-205
DOI: 10.17654/nt040020199

④ 石橋 宏行, Injectivity of global maps of cellular automata, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications, 査読有, 2018（掲載予定）

⑤ 石橋　宏行, Product of discrete topological spaces, RIMS Kokyuroku, 査読有, 2018 （掲載予定）

⑥ 山口　博, Measures of analytic type and semicharacters, Josai Mathematical Monographs, 査読有, Vol. 11, 2018, pp. 27-35

⑦ 関口　勝右, On the torsion units of ZDn, Transactions of the Kokushikan University School of Science and Engineering, 査読有, Vol. 11, 2017, pp.65-69

⑧ 山口　博, Quasi-invariance of measures of analytic type on locally compact abelian groups. Hokkaido Mathematical Journal, 査読有, Vol. 43, No. 1, 2014, pp. 51-64.

〔学会発表〕（計５件）

① 中島　晴久, Calculation of invariant rings by cutting semi-invariants, RIMS Symposia (open) "Developments of Language, Logic, Algebraic System and Computer Science", Research Institute for Mathematical Sciences, 2018

② 石橋　宏行, Product of topological space, RIMS Symposia (open) "Developments of Language, Logic, Algebraic System and Computer Science", Research Institute for Mathematical Sciences, 2018

③ 山口　博, 解析的測度と semicharacter について, JMM Workshop on Applied Functional Analysis, 2017

④ 中島　晴久, Liftings of pseudo-reflection groups on invariant subrings of Krull domains of algebraic subtori under actions of reductive groups, The Mathematical Society of Japan, 2017

⑤ 中島　晴久, Pseudo-reflections of stable regular actions of finite central extensions of algebraic tori in free characteristics, The Mathematical Society of Japan, 2016

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://www2.obirin.ac.jp/nakajima/senkou.htm

６．研究組織
(1)研究代表者
中島　晴久（NAKAJIMA, Haruhisa）
桜美林大学・自然科学系・教授
研究者番号：９０１４５６５７

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
石橋　宏行（ISHIBASI, Hiroyuki）
城西大学・理学部・名誉教授
研究者番号：９０１１８５１３

山口　博（YAMAGUCHI, Hiroshi）
城西大学・理学部・教授
研究者番号：２０１３７７９８

関口　勝右（SEKIGUCHI, Katsusuke）
国士舘大学・理工学部・教授
研究者番号：２０１４６７４９

(4)研究協力者
（　　　）